Disposition

1. Intro
2. Syntaks og semantik
3. Soundness & Completeness
4. Soundness
5. Completeness

1. Introduktion til logik

Målet med logik i CS: at udvikle sprog man kan bruge til at resonere om situationer på en formel måde. Dvs. at konstruere argumenter om situationer, der er formelle så vi ved at argumenterne holder og at de kan udføres på en maskine.

Når man snakker om logik i datalogi, er det primært i forhold til spørgsmål om en model (situation) opfylder (satisfies) en given formel (som fortæller hvad der skal være sandt):

$$M \models \phi$$

Det gælder f.eks. verifikation, hvor man vil være sikker på at ens program overholder en given egenskab. Det gælder f.eks. til programmer hvor man har en pre- og en postcondition om man vil sikre sig, at hvis preconditions er overholdt så kan man garantere at postconditionen også er overholdt. Logik kan altså bruges til at bevise at et program opfører sig som man gerne vil have det til at opføre sig. Derudover kan det bl.a. bruges til type checking.

Hvad vil det sige at bevise at noget er korrekt? Det er hvis man udfra de regler der gælder for den pågældende situation kan argumentere for at hvis man har nogle premisser så kan man drage en konklusion. Dvs. at man kan komme fra premisser til en konklusion ved hjælp af de regler der er tilgængelige indenfor en given logik.

2. Semantik og syntaks

Propositions er bygget op omkring deklarative sætninger (f.eks. "Summen af tallene 3 og 5 er 8"). Essensen af de deklarative sætninger er at de enten kan være sande eller falske. I naturlig deduktion drager man en konklusion ved at komme fra en række præmisser, via en masse bevis regler til konklusionen.

Syntaks: $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$, **theorem:** $\vdash \psi$

Regler for $\wedge$

$$\frac{\varphi \quad \psi}{\varphi \wedge \psi} \wedge i \qquad \frac{\varphi \ \wedge \ \psi}{\varphi} \wedge e1 \qquad \frac{\varphi \ \wedge \ \psi}{\psi} \wedge e2$$

Bevis for $p \wedge q, r \vdash q \wedge r$

1	$p \wedge q$	premise	
2	r	premise	
3	q	$\wedge e_2$	1
4	$q \wedge r$	$\wedge i$	3,2

Semantik: $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \models \psi$, **tautologi:** $\models \psi$ (fx $\models p \vee \neg p$)

Semantik for propositionslogik består i at lave sandhedstabeller for de forskellige regler og kombinationer af regler.

φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

3. Soundness & Completeness

Sound: $\phi_1 ... \phi_n \mid - \psi \Rightarrow \phi_1 ... \phi_n \models \psi$ Bevis ved regler → Bevis i virkeligheden. (Intet er tilladt).

Complete: $\phi_1 ... \phi_n \models \psi \Rightarrow \phi_1 ... \phi_n \mid - \psi$ Alt hvad der er rigtigt → Bevises ved regler. (Alt er tilladt).

Soundness og completeness er udfordringen, da kun kombineringen er de to er interessant.

4. Soundness

Induktion i antallet af linjer for et bevis.

I.H.: Hvis $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \mid\!- \psi$ er gyldig, gælder $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \mid\!= \psi$.

M(k): "For alle sequents $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \mid\!- \psi$ ($n \geq 0$) som har et bevis på k linjer, gælder $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \mid\!= \psi$."

Vi antager M(k') for alle k' < k (så alt ovenover linje k gælder):

Basis: En præmis (n=1):

```
1        ϕ        premise
```

Så gælder $\phi \mid\!= \phi$ selvfølgelig (both sides evaluates to true).

Induktions skridt: We assume that the proof of $\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n \mid\!- \psi$ has length k and that the statement we want to prove is true for all line numbers < k. Our proof has the following structure:

1	ϕ_1	premise
2	ϕ_2	premise
	$\vdots$	
n	ϕ_n	premise
	$\vdots$	
k	ψ	justification

Vi ser på alle vores regler. Vi skal for dem alle kunne vise, at vores konklussion er lovlig. Vi ser på reglen AND-introduction: $\dfrac{\phi \quad \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge_i$ Vi ved at $\phi_1 ... \phi_n \models \psi$ gælder for k'<k. Derfor $\phi_1 ... \phi_n \models \psi_1$ og $\phi_1 ... \phi_n \models \psi_2$, da de står på en linie < k.

$\phi_1 ... \phi_n \mid - \psi$ Følger af AND-introduktionen.

$\phi_1 ... \phi_n \models \psi$, $\psi = \psi_1 \wedge \psi_2$ Må følge da vi semantisk har beviser for Ψ_1 og Ψ_2 via vores I.H.

5. Completeness

$\phi_1 \ldots \phi_n \models \psi \Rightarrow \phi_1 \ldots \phi_n \mid\!- \psi$

Skal bevises for alle regler der kan være rødder I vores parse-træer, dvs.: $\wedge$ $\vee$ $\neg$

Step1: $\models \phi_1 \to (\phi_2 \to (\ldots \to (\phi_n \to \psi)))$

a. *Since this is a tautology it has to be true. The only way it can be false is, when ψ evaluates to false, and all ϕ's evaluates to true. But this contradicts the fact that $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \models \psi$ holds.*

Step2: $\mid\!- \phi_1 \to (\phi_2 \to (\ldots \to (\phi_n \to \psi)))$

Step3: $\phi_1 \ldots \phi_n \mid\!- \psi$

a. *We introduce $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ as premises and apply* $\to$e *n times on each of these premises. Finally we will get a proof for the sequent* $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \mid\!- \psi$.

I step2 beviser vi alle indgange I et truth-table.

Vi har Ø der er vores parse-tree. Vi ser på enhver forgrening.

Hvis det fx. Er AND, ser vi på truth-tablet for AND og beviser alle linier.

Vi kalder parse-træet Ø og vi får I.H.

$\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_n \mid\!- \phi$ kan bevises hvis indgangen for Ø I linie l er T.

$\hat{p}_1, \hat{p}_2, \ldots, \hat{p}_n \mid\!- \neg\phi$ kan bevises hvis for indgangen Ø I linie l er F.

Så fx. Bevises for NOT: $\phi = \neg\phi_1$ hvor $Ø_1$ er parse-træet $\neg - \phi_1$

Ø = T, $Ø_1$ = F.

Ø = F, $Ø_1$ = T.