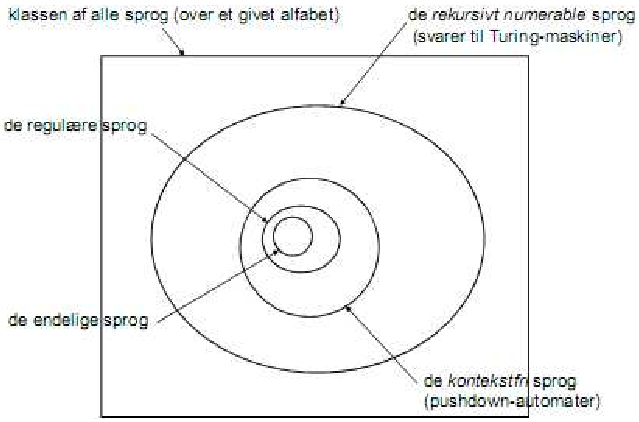
Lukkethedsegenskaber

- Hvad er **lukkethedsegenskaber**?
- Regulære sprog. Produktkonstruktionen
  - Viser lukkethedsegenskaber ved de regulære sprog
  - Foreningsmængde (union), fællesmængde (snit), differens
  - Bevis (et konstruktivt bevis) + evt. lemma



Produktkonstruktionen: $L(M) = L(M_1) \cup L(M_2)$

$$M_1 = (Q_1, \Sigma, q_1, A_1, \delta_1)$$
$$M_2 = (Q_2, \Sigma, q_2, A_2, \delta_2)$$

Vi laver en ny automat, med følgende egenskaber:

$$Q = Q_1 \times Q_2$$
$$q_1 = (q_1, q_2)$$
$$A = \{(p,q) \in Q \mid p \in A_1 \vee q \in A_2\}$$
$$\delta((p,q),a) = (\delta_1(p,a), \delta_2(q,a))$$

Det er givet ved et lemma at:

$$\delta^*((p,q),x) = (\delta_1^*(p,x), \delta_2^*(q,x))$$

Lemma, induktions bevis i x:

$$x = \Lambda$$

Basistilfælde: $\delta^*((p,q),x) = (p,q)$

$$(\delta^*(p,x), \delta^*(q,x)) = (p,q)$$

I.H, det gælder for $|x| = n$

Derfor:

$$|x| = n+1$$
$$x = ya$$
$$\delta^*((p,q),ya) = \delta(\delta^*((p,q),y),a) = \delta((\delta_1^*(p,y), \delta_2^*(q,y)),a)$$
$$= (\delta_1(\delta_1^*(p,y),a), \delta_2(\delta_2^*(q,y),a)) = (\delta_1^*(p,x), \delta_2^*(q,x))$$

Bevis (konstruktivt) for korrekthed:

$$x \in L(M) \Leftrightarrow \delta^*(q_0,x) \in A \xleftrightarrow{q_0} \delta^*((q_1,q_2),x) \in A \xleftrightarrow{lemma} (\delta_1^*(q_1,x), \delta_2^*(q_2,x)) \in A$$
$$\xleftrightarrow{def.A} \delta_1^*(q_1,x) \in A_1 \vee \delta_2^*(q_2,x) \in A_2 \longleftrightarrow x \in L(M_1) \vee x \in L(M_2)$$
$$\xleftrightarrow{\cup} x \in (M_1) \cup L(M_2)$$

To FA'er accepterer de to regulære sprog. Vi laver en ny automat, der accepterer hhv.

$$\cup, \cap, -$$

Det eneste vi ændrer, er accepttilstande:

$$\cup:\ A = \{(p,q) \in Q \mid p \in A_1 \vee q \in A_2\}$$
$$\cap:\ A = \{(p,q) \in Q \mid p \in A_1 \wedge q \in A_2\}$$
$$-:\ A = \{(p,q) \in Q \mid p \in A_1 \wedge q \notin A_2\}$$

- **Kontekstfri sprog**, CFL.
  - Tilsvarende for CFG. Udfra to CFG'er laver vi en tredje med operationerne forening, konkaternering og kleene-*. Fælles og komplement er ikke lukket under CFL.

$$L = \{a^i b^j c^k \mid i < j, i < k\} \notin CFL$$
$$L_1 = \{a^i b^j c^k \mid i < j\} \qquad L_2 = \{a^i b^j c^k \mid i < k\}$$
$$L_1 \cap L_2 = L \Rightarrow \cap \text{ ikke lukket}$$

Komplement: $(L_1' \cup L_2')' = L_1 \cap L_2$, altså er komplement heller ikke lukket.