1. Løsninger og mindste kvadraters løsninger af lineære ligningssystemer

- **Ligningssystem**
- **Underdeterminerede (sætn. 1.2.1)**
- **Overdeterminerede (sætn. 5.3.1)**

Vi har m lineære ligninger og kan opstille følgende ligningssystem:

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_n \end{matrix}$$

Så kan vi opstille det på matrixform:

$$Ax = b$$

Med løsning på formen $c = (c_1, \dots, c_n)^T$ som sættes ind på x'ernes plads. Måden vi finder løsningen på er ved at ændre den udvidede matrix $[A|b]$ vha. rækkeoperationerne:

$$R_i \leftrightarrow R_j \qquad R_i \to sR_i \qquad R_i \to R_i + tR_j$$

Vi har så et lemma, der siger, at løsningsmængden til to systemer er ens, hvis de to systemer er ens – og de to systemer er **rækkeækvivalente**: $[A|b] \sim [B|c]$ så har $Ax = b$ og $Bx = c$ ens løsningsmængde.

Vi skal finde $[B|c]$ så løsninger er nemme at skrive ned. Vi indfører **REF**:

1. En række med 0'er ligger under alle andre.
2. Den første ikke-nul indgang i en række er 1 og ligger i søjlen til højre for første ikke-nul adgang i rækken ovenfor.
3. RREF: alle andre indgange i en søjle med pivot er 0.

Så har vi **underdeterminerede** systemer, som er ligningssystemer med flere ubekendte end ligninger. Dvs. $n > m$. Generelt er underdeterminerede systemer konsistente – dvs. der findes altid mindst én løsning. Men der kan være tilfælde, hvor de vil være inkonsistente – fx hvis RREF har to nulrækker.

Sætning 1.2.1: Et $m \times n$ homogent ligningssystem har en ikke-triviel løsning, hvis $n > m$.

Bevis: Et homogent system er altid konsistent (da. $b = 0$ - der vil altid være den trivielle løsning $x = 0$).

Ydermere må systemet have maks. m ikke-nulrækker ⇒ maks. m pivot'er.

Da der er n variabler må der altså være mindst én eller flere frie variabler, som er arbitrære – og for enhver arbitrær værdi er der en løsning.

Herudover har vi også **overdeterminerede** ligningssystemer, hvor vi har flere ligninger en ubekendte ($m > n$). Her taler vi om at ligningssystemerne ofte er inkonsistente. Vi kan dog tilnærme os en løsning. Igen har vi samme ligningssystem som fra starten, og definerer så residualet:

$$r(x) = b - Ax \quad , \quad A \in Mat_{m,n}(\mathbb{F}) \quad , \quad b \in \mathbb{R}^m \quad , \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Så er $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$, så $\left||r(\hat{x})|\right|^2$ er mindst mulig en mindste kvadrates løsning. Afstanden mellem b og Ax er ligeledes givet ved:

$$\left||r(x)|\right| = ||b - Ax||$$

Hvis $\hat{x}$ er en løsning til $Ax = b$ og $p = A\hat{x}$ så er p den vektor i søjlerummet for A som er tættest på b. Vi vil med følgende sætning vise at p findes og er unik!

Sætning 5.3.1: Lad S være et underrum af $\mathbb{R}^m$. For hvert $b \in \mathbb{R}^m$ findes en unik projektion p af b på S det nærmeste punkt på b i S:

$$\left||b - y|\right| > \left||b - p|\right| \ , \ \forall y \neq p \in S$$

Ydermere gælder det, at p kun vil være tættest på b, hvis og kun hvis $b - p \in S^\perp$

Bevis: ⇒: Vi ved $\mathbb{R}^m = S \oplus S^\perp$, så vi kan skrive $b = p + z$, hvor $z \in S^\perp$. Vi kan så skrive:

$$||b-y||^2 = ||(b-p)+(p-y)||^2$$

Da $b-y \in S$ og $b-p = z \in S^{\perp}$ så kan vi bruge Pythagoras:

$$||b-y||^2 = ||b-p||^2 + ||p-y||^2$$

Da $p \neq y$ har vi heraf, at

$$||b-y|| > ||b-p||$$

$\Leftarrow$: Så, hvis vi vælger et $q \in S$ og $b-q \notin S^{\perp}$, så da $q \neq p$ har vi at $q = y$. Da y er alle elementer i S, som ikke er p, har vi igen: $\|b-q\| > \|b-p\|$