2. Vektorrum og underrum

- **Aksiomer**
- **Egenskaber**
- **Underrum**
- **Sætning 3.2.1**

Definition: En mængde V udstyret med en addition ($\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in V$) og skalarmultiplikation ($\alpha \boldsymbol{v} \in V$). Så kaldes V et vektorrum, hvis følgende aksiomer er opfyldt:

$\boldsymbol{A1}: \forall x, y \in V: \quad x + y = y + x \quad (kommutativ)$

$\boldsymbol{A2}: \forall x, y, z \in V: \quad x + (y + z) = (x + y) + z \quad (associativ)$

$\boldsymbol{A3}: \exists 0 \in V: \; x + 0 = x \quad (eksistens\ af\ neutral\ element)$

$\boldsymbol{A4}: \forall x \in V, \exists -x \in V: x + (-x) = 0 \quad (additiv\ invers)$

$\boldsymbol{S1}: \forall \alpha \in \mathbb{F}, x, y \in V: \; \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$

$\boldsymbol{S2}: \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, x \in V: (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad (2\ distributive\ egenskaber)$

$\boldsymbol{S3}: \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, x \in V: (\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$

$\boldsymbol{S4}: 1 \cdot x = x \quad (1\ er\ et\ neutralt\ element\ for\ skalarmultiplikation)$

Herudover har vi nogle flere egenskaber ved vektorrum:

Sætning 3.1.1: V er et vektorrum og x er et element i V, så gælder:

(1) $0 \cdot x = 0$
(2) $x + y = 0$ så $y = -x \quad (-x\ er\ en\ entydig\ additiv\ invers\ til\ x)$
(3) $(-1)x = -x$

Bevis:

$$(1)\ x \overset{S4}{=} 1x = (1 + 0)x \overset{S2}{=} 1x + 0x \overset{S4}{=} x + 0x$$

$$0 = -x + x \overset{brug\ x\ fra\ oven}{=} -x + (x + 0x) \overset{A2}{=} (-x + x) + 0x$$

$$= 0 + 0x \overset{A1}{=} 0x + 0 \overset{A3}{=} 0x$$

$$(2) -x \overset{A3}{=} -x + 0 \overset{brug\ x+y=0}{=} -x + (x + y) \overset{A2}{=} (-x + x) + y = 0 + y \overset{A1}{=} y + 0 \overset{A3}{=} y$$

$$(3)\ 0 \overset{(1)}{=} 0x = \big(1 + (-1)\big)x \overset{S2}{=} 1x + (-1)x \overset{S4}{=} x + (-1)x$$

Vi bruger så (2) til at indse, at der må gælde: $x + (-1)x = 0$ så er $(-1)x = -x$

Vi har også underrum, som er defineret ved:

Definition: En ikke-tom delmængde S af et vektorrum V kaldes et underrum, hvis følgende gælder:

$\boldsymbol{C1}: \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{F}: \qquad \alpha x \in S$

$\boldsymbol{C2}: \forall x, y \in V: \qquad x + y \in S$

$C1$ og $C2$ er også lukkethedsegenskaber for vektor.

Vi definerer et span:

Definition: Lad $v_1, \dots, v_n$ være vektorer i et vektorrum V.

En linear kombination er en sum på formen $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, hvor α_i er skalarer.

Mængden af alle linear kombinationer af $v_1, \dots, v_n$ kaldes span for $v_1, \dots, v_n \to Span(v_1, \dots, v_n)$.

Vi vil nu bevise, at et span er et underrum af V.

Sætning 3.2.1: Hvis $v_1, \dots, v_n$ er elementer i et vektorrum V, så er $Span(v_1, \dots, v_n)$ et underrum til V.

Bevis: Vi bruger definitionen på et underrum. Hvis $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ er et arbitrært element i $Span(v_1, \dots, v_n)$ og β er en skalar:

$C1$: $\beta v = \beta(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \overset{S1}{=} (\beta\alpha_1)v_1 + \cdots + (\beta\alpha_n)v_n \in Span(v_1, \dots, v_n)$

Nu definerer vi $w = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_n v_n$.

$C2$: $v + w = (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) + (\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) \overset{S2}{=} (\alpha_1 + \beta_1)v_1 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n)v_n \in Span(v_1, \dots, v_n)$

Dermed er $Span(v_1, \dots, v_n)$ et underrum af V.