3. Lineær uafhængighed

- **Definition**
- **Lemma 1.4.2**
- **Sætning 3.3.1**
- **Lemma 1.2.1**
- **Sætning 3.4.1**

Definition: Vektorerne $v_1, \dots v_n$ i et vektorrum V er lineært uafhængige, hvis

$$c_1v_1 + \cdots + c_nv_n = 0 \Rightarrow c_1 = 0, \dots, c_n = 0$$

Vi har et lemma, vi bruger til beviset senere:

Lemma 1.4.2: A er en $n \times n$ matrix, så gælder:

i) A er invertibel

ii) Det homogene ligningssystem $Ax = 0 \Rightarrow x = 0$

iii) A er rækkeækvivalent til I

Følgende sætning fortæller os, at hvis søjlerne i en matrix er lineært uafhængige, så er matrixen invertibel.

Sætning 3.3.1: Lad $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ og $X = (x_1, \dots, x_n)$. $x_1, \dots, x_n\ lin\ uafh. \Leftrightarrow X\ er\ invertibel.$

Bevis: Vi kan skrive ligningen

$$c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$$

Om til $Xc = 0$, hvor $c = (c_1, \dots, c_n)^T$

Ligningen har kun løsningen 0, hvis og kun hvis X er invertibel (jf. sætning, der siger, at $A\ inv. \Leftrightarrow Ax = 0 \Leftrightarrow x = 0$).

Vi skal bruge en definition…

Definition: $\{v_1, \dots, v_n\}$ udspændende mængde for V hvis og kun hvis, hver vektor i V kan skrives som en linear kombination af $v_1, \dots, v_n$.

…og et lemma…

Lemma 1.2.1: Et $m \times n$ homogent ligningssystem har en ikke-triviel løsning, hvis $n > m$.

Bevis: Et homogent system er altid konsistent (da. $b = 0$ - der vil altid være den trivielle løsning $x = 0$).

Ydermere må systemet have maks. m ikke-nulrækker ⇒ maks. m pivot'er.

Da der er n variabler må der altså være mindst én eller flere frie variabler, som er arbitrære – og for enhver arbitrær værdi er der en løsning.

…til det sidste bevis:

Sætning 3.4.1: Hvis $\{v_1, \dots, v_n\}$ er en udspændende mængde for V, så vil enhver samling af m vektorer $\{u_1, \dots, u_m\}$ i V være lineære afhængige når $m > n$.

Bevis: Lad $u_1, \dots, u_m$ være m vektorer i V. Jf. def. Af udspændende mængde, kan vi skrive:

$$u_i = a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j \quad , \quad i = 1, \dots, m$$

Vi har en linear kombination, som vi skriver lidt om på (vi indsætter ovenstående på u_i's plads):

$$c_1 u_1 + \cdots + c_m u_m = c_1 \sum_{j=1}^{n} a_{1j} v_j + \cdots + c_m \sum_{j=1}^{n} a_{mj} v_j = \sum_{i=1}^{m} \left(c_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j \right) \right)$$

(vi bytter om på sumtegnene, da kun a_{ij} afhænger af begge)

$$= \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i \right) v_j$$

Nu kigger vi på ligningssystemet (homogent):

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} c_i = 0 \quad , \quad j = 1, \ldots, n$$

Dette system består af m ubekendte med n ligninger (altså flere ubekendte end ligninger). Dette system har en ikke-triviel løsning $(\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_m)^T$. Hvis vi indsætter denne løsning i den første linear kombination (hvor den midterste sum så er 0):

$$\widehat{c_1} u_1 + \cdots + \widehat{c_m} u_m = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} \widehat{c_i} \right) v_j = \sum_{j=1}^{n} 0 v_j = 0$$

Så da ovenstående giver 0 med en ikke-triviel løsning, er vektorerne $u_1, \ldots, u_m$ lineært afhængige.