# 4. Basis for vektorrum; koordinatisering

- **Definition**
- **Sætning 3.4.1**
- **Koordinatisering**

**Definition:** Vektorerne $v_1, \dots, v_n$ danner en basis for vektorrummet $V$ hvis og kun hvis:

$$(i)\ v_1, \dots, v_n \quad er\ lin\ uafh.$$

$$(ii)\ v_1, \dots, v_n \ \ udspænder\ V$$

Dvs. alle linear kombinationer for $v_1, \dots, v_n$ ligger i $Span(v_1, \dots, v_n)$.

En mængde $\{x_1, \dots, x_n\}$ er lineært uafhængige, hvis og kun hvis $c_1x_1 + \cdots + c_nx_n = 0$ med $c_i = 0, i = 1, \dots, n$. Ellers er de lineært afhængige.

Vi siger at en basis er den minimale mængde vektorer, der skal til for at udspænde et rum.

**Definition:** $\{v_1, \dots, v_n\}$ udspændende mængde for $V$ hvis og kun hvis, enhver vektor i $V$ kan skrives som en linear kombination af $v_1, \dots, v_n$.

For at bevise den næste sætning, bruger vi desuden ovenstående definition. Hvis vi i den følgende sætning antager, at vektorerne $v_1, \dots, v_n$ er basis for vektorrummet $V$, så er de vektorer lineært uafhængige, og sætningen siger så, at hvis man har bare $n + 1$ vektorer fra rummet, så vil de vektorer være lineært afhængige.

**Sætning 3.4.1:** Hvis $\{v_1, \dots, v_n\}$ er en udspændende mængde for $V$, så vil enhver samling af $m$ vektorer i $V$ være lineære afhængige. $m > n$.

**Bevis:** Lad $u_1, \dots, u_m$ være $m$ vektorer i $V$. Jf. def. Af udspændende mængde, kan vi skrive:

$$u_i = a_{i1}v_1 + \cdots + a_{in}v_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j \quad , \quad i = 1, \dots, m$$

Vi har en linear kombination, som vi skriver lidt om på (vi indsætter ovenstående på $u_i$'s plads):

$$c_1u_1 + \cdots + c_mu_m = c_1\sum_{j=1}^{n} a_{1j}v_j + \cdots + c_m\sum_{j=1}^{n} a_{mj}v_j = \sum_{i=1}^{m}\left(c_i\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}v_j\right)\right)$$

(vi bytter om på sumtegnene, da kun $a_{ij}$ afhænger af begge)

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}c_i\right)v_j$$

Nu kigger vi på ligningssystemet (homogent):

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}c_i = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, n$$

Dette system består af $m$ ubekendte med $n$ ligninger (altså flere ubekendte end ligninger). Dette system har en ikke-triviel løsning $(\hat{c}_1, \dots, \hat{c}_m)^T$. Hvis vi indsætter denne løsning i den første linear kombination (hvor den midterste sum så er 0):

$$\widehat{c_1}u_1 + \cdots + \widehat{c_m}u_m = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\widehat{c_i}\right)v_j = \sum_{j=1}^{n} 0v_j = 0$$

Så da ovenstående giver 0 med en ikke-triviel løsning, er vektorerne $u_1, \dots, u_m$ lineært afhængige.
Herudover kan det ofte være nyttigt at skifte fra en basis til en anden. Helt konkret har vi følgende definition:

**Definition:** Lad $V$ være et vektorrum, og lad $E = [v_1, \dots, v_n]$ være en ordnet basis for $V$. Et element $v$ fra $V$ kan skrives som: $v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n$. Så vi kan associere hver vektor $v$ med en unik vektor $c = (c_1, \dots, c_n)^T \in R^n$. Denne vektor kaldes koordinatvektoren til $v$ mht. $E$ og skrives $[v]_E$. $c_i$'erne kaldes $v$'s koordinater relativt til $E$.

Fremgangsmåden for at skifte basis i $\mathbb{R}^2$:

**Fremgangsmåde:** Vi ønsker at skifte basis fra $[v_1, v_2]$ til $[u_1, u_2]$, hvor de begge er ordnede baser for $\mathbb{R}^2$. Hvis vi har en vektor $x \in \mathbb{R}^2$, så kan vi skrive den ud fra $V$:

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 \quad , \quad c = [x]_V$$

Hvor vi antager, vi kender $c$. $x$ ønsker vi så at skrive ud fra $U$:

$$x = d_1 u_1 + d_2 u_2 \quad , \quad d = [x]_U$$

Så vi skal altså finde disse to skalarer:

$$d_1 u_1 + d_2 u_2 = c_1 v_1 + c_2 v_2$$

Hvis vi siger, at $V = (v_1, v_2)$ og $U = (u_1, u_2)$, så har vi:

$$Vc = Ud$$

Da $U$ og $V$ består af basis-vektorer er de lineært uafhængige, og dermed er de to matricer invertible:

$$d = U^{-1} V c$$

Vi siger så, at $S = U^{-1} V$ er transitionsmatrixen. Så får vi den nye koordinatvektor for $x$ mht. $[u_1, u_2]$ ved at gange den gamle med $S$.