6. Determinanter

- **Definition**
- **ERO**
- **Sætning 2.2.2**
- **Cramers regel**

For alle kvadratiske matricer ($n \times n$) findes der et tal, som vi kalder determinanten. Determinanter kan bl.a. bruges til at løse ligningssystemer (specielt ved $n > 3$).

Definition: For $A \in Mat_{1\times1}$ så er determinanten $\det(A) = a_{11}$. For $n > 1$ er determinanten givet ved

$$\det(A) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n}$$

(her rækkeudvikling af 1. række). Generelt med rækkeudvikling langs i'te række eller søjleudvikling langs j'te søjle:

$$\det(A) = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}$$
$$= a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad , \quad i, j = 1, \ldots, n$$

A'erne (kofaktorerne) er givet ved:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j}\det\left(M(A)_{ij}\right)$$

Hvor igen $M(A)_{ij}$ er $(n-1) \times (n-1)$-matricen, som man får ved at fjerne rækken og søjlen, som indgang a_{ij} er i. Dvs. en slags rekursiv definition.

Vi kan sige lidt om determinanten for nogle forskellige matricer:

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(A) = 0$, hvis A indeholder en nul-række eller –søjle (ækvivalent med to ens rækker eller søjler).
- Determinanten er produktet af diagonalelementerne i en triangulær matrix.

Rækkeoperationer på en matrix gør noget forskelligt ved determinanten:

i. To rækker ombyttes: $\det(A) \to -\det(A)$
ii. En række ganges med en ikke-nul skalar: $\det(A) \to \alpha\det(A)$
iii. Lægge et multiplum af en række til en anden: $\det(A) \to \det(A)$

Som en sidenote til beviset kan det siges, at generelt gælder $\det(E) \neq 0$ for alle rækkeoperationer. Ydermere har vi, at $\det(EA) = \det(E)\det(A)$.

Sætning 2.2.2: $A \in Mat_{n\times n}$ er ikke-invertibel $\Leftrightarrow \det(A) = 0$.

Bevis: Vi kan få A på RREF ved et endeligt antal rækkeoperationer. Dvs.

$$U = E_k E_{k-1} \ldots E_1 A$$

Hvis vi tager determinanten af U:

$$\det(U) = \det(E_k E_{k-1} \ldots E_1 A) = \det(E_k)\det(E_{k-1}) \ldots \det(E_1)\det(A)$$

Da alle $\det(E_i) \neq 0$ må $\det(A) = 0 \Leftrightarrow \det(U) = 0$. Hvis A er invertibel, vil U have 1'er på diagonalen og $\det(U) = 1$, men da $\det(U) = 0$ må A være ikke-invertibel, og U har enten nul-rækker og/eller –søjler.

Som sagt tidligere, kan determinanter også bruges til at beregne løsninger, til ligningssystemer. Først definerer vi den adjungerende matrix til brug i Cramers regel.

Definition: Den adjungerende matrix $adj\,A$ består af kofaktorerne for A transponeret:

$$adj\ A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \vdots & & & \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

A og $adj\,A$ ganget sammen giver determinanten til A: $A(adj\ A) = \det(A)\,I$

Dette kan skrives om til (hvis A er invertibel → det(A)≠0): $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj\ A$

Cramers regel med bevis:

Sætning 2.3.1: $A \in Mat_{n,n}(\mathbb{F})$ som er invertibel, $b \in \mathbb{R}^n$. Så er A_i matrix A med i'te søjle skiftet ud med b. Hvis $\hat{x}$ er en unik løsning til $Ax = b$. Så er indgangene i $\hat{x}$ givet ved:

$$\hat{x_i} = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad , \qquad i = 1,2, \dots, n$$

Bevis: Vi kan skrive $\hat{x}$ op på følgende måde:

$$\hat{x} = A^{-1}b \overset{\text{def}\, adj\ A}{=} \left(\frac{1}{\det(A)} adj\ A\right) b = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \cdots + b_nA_{n1} \\ \vdots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \cdots + b_nA_{nn} \end{pmatrix}$$

Og så er $\hat{x_i}$ altså givet ved:

$$\hat{x_i} = \frac{b_1A_{1i} + b_2A_{2i} + \cdots + b_nA_{ni}}{\det(A)} = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$