8. Diagonalisering

- **Egenværdier og –vektorer**
- **Definitioner**
- **Sætning 6.3.2**
- **Bemærkninger**
- **Sætning 9.2.3**

Definition: $A \in Mat_{n,n}(\mathbb{F})$, $\in \mathbb{F}$ er en egenværdi for A, hvis der findes en ikke-nul-vektor x således, at: $Ax = \lambda x$ gælder. x kaldes så for egenvektoren tilhørende egenværdien λ.

En egenværdi kan have flere egenvektorer, men en egenvektor har kun én egenværdi. For at finde egenværdierne for en matrix A, skal vi finde det karakteristiske polynomium.

Definition: Egenværdierne for en matrix A kan beregnes fra det karakteristiske polynomium (eller ligning):

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0$$

Rødderne er så egenværdierne. Typisk siger vi, at en $n \times n$ matrix har n egenværdier (talt med multiplicitet).

En lille smule om similaritet.

Definition: En matrix B er similær til A, hvis der findes en invertibel matrix S således, at:

$$B = S^{-1}AS$$

Sætning 6.1.1: For to similære matricer A og B gælder det, at deres karakteristiske polynomium er ens:

$$p_A(\lambda) = p_B(\lambda)$$

Dermed har de to matricer også samme egenværdier.

Bevis:

$$\begin{aligned} p_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) = \det(S^{-1}AS - \lambda I) = \det(S^{-1}(A - \lambda I)S) \\ &= \det(S^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(S) = p_A(\lambda) \end{aligned}$$

Vi kan bruge egenværdier og egenvektorere til at diagonalisere en matrix:

Definition: En $n \times n$ matrix er diagonaliserbar, hvis det findes en invertibel matrix X og en diagonal matrix D, så:

$$A = X^{-1}DX$$

Vi siger så, at X diagonaliserer A.

Følgende sætning fortæller os, hvad der skal gælde om egenvektorerne for en matrix A:

Sætning 6.3.2: En $n \times n$-matrix A er diagonaliserbar $\Leftrightarrow$ n lineært uafhængige egenvektorere for A.

Bevis: $\Leftarrow$: Vi antager A har de lineært uafhængige egenvektore $x_1, \dots, x_n$, og lader λ_i være egenværdien tilhørende x_i. X er en matrix med x_j som j'te søjlevektor. Vi ved så: $Ax_j = \lambda_j x_j$ er den j'te søjlevektor for AX. Så:

$$\begin{aligned} AX &= (Ax_1, \dots Ax_n) = (\lambda_1 x_1, \dots, \lambda_n x_n) \\ &= (x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} = XD \end{aligned}$$

Da X består af n lineært uafhængige vektorere, er X invertibel, og vi har:

$$XD = AX \Rightarrow X^{-1}XD = X^{-1}AX \Rightarrow D = X^{-1}AX$$

$\Rightarrow$: Hvis A er diagonaliserbar så har vi: $A = XDX^{-1} \Rightarrow AX = XD$ med

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Hvis vi igen siger, at $x_1, \dots, x_n$ er søjlevektorerne for *X*, så har vi igen:

$$Ax_j = \lambda_j x_j \quad (d_{jj} = \lambda_j)$$

Dvs., at x_j er egenvektorere tilhørende λ_j (til *A*). Da *X* var invertibel, består den af *n* lineært uafhængige søjlevektorere – dvs. *A* har *n* lineært uafhængige egenvektorere.

I forbindelse med beviset kan vi nu opsummere nogle ting:

1. Hvis *A* er diagonaliserbar, er søjlevektorerne i diagonaliseringmatricen *X* egenvektorerne for *A*, og diagonalelementerne i *D* er egenværdierne for *A*.
2. Hvis en $n \times n$-matrix *A* har *n* forskellige egenværdier er den diagonaliserbar. Hvis **ikke**, så er den kun diagonaliserbar, hvis alle egenvektorerne er lineært uafhængige.
3. Hvis *A* er diagonaliserbar, kan vi faktorisere $A = XDX^{-1}$.

Til sidst vil vi vise, at det er nemmere at tage *k*'te potens af en diagonaliserbar matrix:

Sætning 9.2.3: *A* er diagonaliserbar, $x_1, \dots, x$ er en basis bestående af egenvektorerne for *A* med tilsvarende egenværdier $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Så gælder der, at:

1. $A^k(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) = c_1\lambda_1^k x_1 + \cdots + c_n\lambda_n^k x_n$
2. Vi siger $X = (x_1, \dots, x_n)$, så er den *k*'te potens af *A* det samme som:

$$A^k = X \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} X^1$$

Bevis: ad 1) For $k \in \mathbb{N}$:

$$A^k(c_1x_1 + \cdots + c_nx_n) = c_1A^k x_1 + \cdots + c_nA^k x_n = c_1\lambda_1^k x_1 + \cdots + c_n\lambda_n^k x_n$$

Jf. definition på egenværdi og –vektor.

ad 2) Ligningen fra 1. kan skrives om til matrixform:

$$A^k X \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = X \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Vi fjerner bare *c*'erne:

$$A^k X = X \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \Rightarrow A^k = X \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} X^{-1}$$

X er invertibel, da den består af uafhængige søjlevektorer.