9. Indre Produkt

- **Def. Indre produkt og norm**
- **Sætning 5.4.1 (Pythagoras)**
- **Def. vektorprojektion**
- **Sætning 5.4.2 (Cauchy-Schwarz' ulighed)**
- **Sætning ---**

Definition: Et indre produkt på et vektorrum, er en operation, der tildeler et reelt tal $\langle x, y\rangle$ til hvert par af vektorer x og y. Følgende regler skal overholdes:

$i.\ \ \langle x,x\rangle \geq 0 \quad , \ lighed \ \Leftrightarrow x = 0$

$ii.\ \ \langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle \quad , \ \forall x,y \in V$

$iii.\ \ \langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle \quad , \ \forall x,y,z \in V \quad og \ \forall \alpha,\beta$

Et vektorrum med et indre produkt kaldes et indre produkt rum.

Helt konkret er det indre produkt defineret som $\langle x,y\rangle = x^T y$ i $\mathbb{R}^n$. I $\mathbb{C}^n$ er det indre produkt defineret som $\langle x,y\rangle = x^H y$ og der gælder desuden: $\langle x,y\rangle = \overline{\langle y,x\rangle}$

Vi vil nu definere normen, idet vi skal bruge den til senere beviser:

Definition: Hvis v er en vektor i et indre produkt rum V, så er normen (eller længden) givet ved:

$$\|v\| = \sqrt{\langle v,v\rangle} \Rightarrow \langle v,v\rangle = \|v\|^2$$

Desuden gælder der, at hvis to vektorer er ortogonale, hvis $\langle u,v\rangle = 0$ og:

$i.\ \ \|v\| \geq 0 \quad , \ lighed \Leftrightarrow v = 0$

$ii.\ \ \|\alpha v\| = |\alpha|\|v\|$

$iii.\ \ \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$

Den sidste betingelse kaldes også trekantsuligheden.

Det vil altså sige, at et par vektorer vil opfylde pythagoras i $\mathbb{R}^n$.

Sætning 5.4.1: Hvis u og v er ortogonale vektorer i et indre produkt rum, så gælder:

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Bevis: Vi kigger på venstresiden i ovenstående og bruger definitionen:

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \langle u,u\rangle + \langle u,v\rangle + \langle v,u\rangle + \langle v,v\rangle \\ &= \langle u,u\rangle + \langle v,v\rangle + 2\langle u,v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2\end{aligned}$$

da u og v er ortogonale har vi $2\langle u,v\rangle = 0$.

Til vores næste bevis, skal vi bruge vektorprojektion:

Definition: Vektorprojektionen p af u på v er givet ved:

$$p = \frac{\langle u,v\rangle}{\langle v,v\rangle} v = \alpha\left(\frac{1}{\|v\|} v\right)$$

Nogle bemærkninger (hvis $v \neq 0$):

I. $u - p$ og p er ortogonale.

Brug def. af skalarprojektion af p og find $\langle u - p, p\rangle$

II. $u = p \Leftrightarrow u$ er et skalarmultiplum af v. Dvs. $u = \beta v$

Hvis $u = \beta v$ så er $p = \frac{\langle \beta v, v\rangle}{\langle v,v\rangle} v = \beta v = u$

Hvis $u = p$, så: $u = \alpha\left(\frac{1}{\|v\|} v\right) = \beta v, \beta = \frac{\alpha}{\|v\|}$

Til sidst har vi Cauchy-Schwarz uligheden, som bevises herunder:

Sætning 5.4.2: v og u er to vektorer i et indre produkt rum V. Så gælder:

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

Med lighed $\Leftrightarrow$ u og v er lineært afhængige.

Bevis: Hvis $v = 0$ så har vi tydeligt, at:

$$|\langle u, v\rangle| = 0 = \|u\|\|v\|$$

Hvis $v \neq 0$, så er p vektorprojektionen af u på v. Hvis vi kigger på:

$$\|u\|^2 = \|p + (u - p)\|^2 \overset{p \perp u-p}{=} \|p\|^2 + \|u - p\|^2 \Rightarrow \|p\|^2 = \|u\|^2 - \|u - p\|^2$$

Projektionen kan også skrives på en anden måde:

$$\|p\|^2 = \left\|\frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle} v\right\|^2 = \left|\frac{\langle u, v\rangle}{\langle v, v\rangle}\right|^2 \|v\|^2 = \frac{(\langle u, v\rangle)^2}{\|v\|^4} \|v\|^2 = \frac{(\langle u, v\rangle)^2}{\|v\|^2} = \|u\|^2 - \|u - p\|^2$$

Dette kan igen skrives om til:

$$(\langle u, v\rangle)^2 = \|u\|^2\|v\|^2 - \|u - p\|^2\|v\|^2 \leq \|u\|^2\|v\|^2$$

I ovenstående har vi kun lighed, hvis $p = u$.

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\|v\|$$

Bemærkning II siger, at hvis $u = p$ så er u et skalarmultiplum af v - dvs. u og v er lineært afhængige.

Til sidst en sætning omkring norm:

Sætning trekantsulighed: Hvis V er et indre produkt rum, så gælder:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$$

Bevis: Vi prøver at skrive det ud:

$$\begin{aligned}\|u + v\|^2 &= \langle u + v, u + v\rangle = \|u\|^2 + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \|v\|^2 \\ &= \|u\|^2 + 2\langle u, v\rangle + \|v\|^2 \\ &\overset{Cauchy-Schwarz}{\leq} \|u\|^2 + 2\|u\|\|v\| + \|v\|^2 \\ &= (\|u\| + \|v\|)^2\end{aligned}$$