10. Ortogonalt komplement og projektion

- **Def. + bemærkninger**
- **Direkte sum**
- **Sætning 5.3.1**

Definition: Y er et underrum af $\mathbb{R}^n$. Mængden af alle vektorer i $\mathbb{R}^n$ som er ortogonale på enhver vektor i Y noteres $Y^\perp$. Dvs.

$$Y^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n | x^T y = 0 \quad for\ alle \ \ y \in Y\}$$

Denne mængde kaldes for ortogonalkomplementet af Y.

Der er nogle forskellige egenskaber ved ortogonalkomplementer:

1. $X \cap Y = \{0\}$ hvis X og U begge er ortogonale underrum til $\mathbb{R}^n$
   Hvis $x \in X \cap Y$ og $X \perp Y$ så er $x^T x = 0$ og dermed er $x = 0$
2. Hvis Y er et underrum til $\mathbb{R}^n$ så er $Y^\perp$ også et underrum til $\mathbb{R}^n$
   Tjekke lukkethedsegenskaber for underrum.
3. $(S^\perp)^\perp = S$
4. $\dim S + \dim S^\perp = n$

Definition: Hvis U og V er underrum af et vektorrum W og alle $w \in W$ kan skrives ***unikt*** som en sum $u + v$, hvor $u \in U$ og $v \in V$ så er W en **direkte sum** af U og V og vi skriver: $W = U \oplus V$

Lemma 5.2.2: Hvis $\{x_1, \dots, x_r\}$ er basis for S og $\{x_{r+1}, \dots, x_n\}$ er basis for $S^\perp$, så er $\{x_1, \dots, x_r, x_{r+1}, \dots, x_n\}$ basis for $\mathbb{R}^n$

Sætning 5.2.3: Hvis S er et underrum af $\mathbb{R}^n$, så kan vi skrive: $\mathbb{R}^n = S \oplus S^\perp$

Bevis: Hvis $S = \{0\}$ eller $S = \mathbb{R}^n$ er resultatet trivielt.

Vi siger $\{x_1, \dots, x_r\}$ er en basis for S og $\{x_{r+1}, \dots, x_n\}$ er en basis for $S^\perp$. Så kan vi skrive $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x = c_1 x_1 + \cdots + c_r x_r + c_{r+1} x_{r+1} + \cdots + c_n x_n$$

Så skriver vi $u = c_1 x_1 + \cdots + c_r x_r$ og så $u \in S$ og vi skriver $v = c_{r+1} x_{r+1} + \cdots + c_n x_n$ og så $v \in S^\perp$. Dermed har vi, at $x = u + v$. Vi skal vise, at dette gælder entydigt, antager vi:

$$x = u' + v' \ \ , \ \ u' \in S \ \ , \qquad v' \in S^\perp$$

Så har vi tydeligt, at

$$u + v = u' + v' \Rightarrow u - u' = v' - v$$

Så er $u - u' \in S$ og $v' - v \in S^\perp$. Dvs.:

$$u - u' = v' - v \in S \cap S^\perp = \{0\}$$

Dermed er $u - u' = v' - v = 0$ og $u = u'$ og $v = v'$.

Sætning 5.3.1: Lad S være et underrum af $\mathbb{R}^m$ og $b \in \mathbb{R}^m$. Da er projektionen p af b på S det nærmeste punkt til b i S:

$$||b - y|| > ||b - p|| \ \ , \ \ \forall y \neq p \in S$$

p er unikt. Ydermere gælder det, at p kun vil være tættest på b, hvis og kun hvis $b - p \in S^\perp$

Bevis: $\Rightarrow$: Vi ved $\mathbb{R}^m = S \oplus S^\perp$, så vi kan skrive $b = p + z$, hvor $z \in S^\perp$. Vi kan så skrive:

$$||b - y||^2 = ||(b - p) + (p - y)||^2$$

Da $b - y \in S$ og $b - p = z \in S^\perp$ så kan vi bruge Pythagoras:

$$||b - y||^2 = ||b - p||^2 + ||p - y||^2$$

Da $y \neq p$ har vi heraf, at

$$||b - y|| > ||b - p||$$

$\Leftarrow$: Så, hvis vi vælger et $q \in S$ og $b - q \notin S^{\perp}$, så da $q \neq p$ har vi at $q = y$. Da y er alle elementer i S, som ikke er p, har vi igen: $\|b - q\| > \|b - p\|$