11. Ortogonale og ortonormale baser

- **Definition**
- **Lemma 5.5.7**
- **Gram-Schmidt**

Først vil vi definere nogle grundbegreber til senere brug:

Definition: Vektorerne $v_1, \dots, v_n$ danner en basis for vektorrummet V hvis og kun hvis:

$$(i)\ v_1, \dots, v_n \quad er\ lin\ uafh.$$

$$(ii)\ v_1, \dots, v_n\ \ udspænder\ V$$

En mængde vektorer fra V er **ortonormale**, hvis de er:

- **ortogonale** på hinanden: $\langle v_i, v_j \rangle = 0, i \neq j$
- enhedsvektorer.

Vi har så, at en mængde af vektorer er ortonormale, hvis:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \quad i = j \\ 0 & , \quad i \neq j \end{cases}$$

Herudover er mængden en **ortonormal basis**, hvis vektorerne er lineært uafhængige og udspænder V.

Vi vil gerne vise og bevise Gram-Schmidt, men først vil vi vise følgende sætninger, der bruges i beviset for Gram-Schmidt.

Lemma 5.5.7: Lad S være et underrum af det indre-produkt rum V. Lad $x \in V$ og $\{x_1, \dots, x_n\}$ være en ortonormal basis for S. $p \in S$ er projektionen af x på S. Så gælder:

$$p - x \in S^\perp \Leftrightarrow p = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle\, x_i$$

Bevis: Da $p \in S$ kan vi skrive: $p = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$. Ifølge 5.5.2, kan vi skrive: $p = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$, $c_i = \langle p, x_i \rangle$. For alle $s \in S$ har vi så:

$$\begin{aligned} p - x \in S^\perp &\Leftrightarrow \langle s, p - x \rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \langle c_1 x_1 + \dots + c_n x_n, p - x \rangle = 0 \quad , \quad c_i\ skalar \\ &\Leftrightarrow c_1 \langle x_1, p - x \rangle + \dots + c_n \langle x_n, p - x \rangle = 0 \quad , \qquad c_i\ skalar \\ &\Leftrightarrow \langle x_i, p - x \rangle = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow \langle x_i, p \rangle = \langle x_i, x \rangle \quad , \quad i = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow \langle p, x_i \rangle = \langle x, x_i \rangle \quad , \quad i = 1, \dots, n \\ &\Leftrightarrow p = \sum_{i=1}^{n} \langle x, x_i \rangle\, x_i \end{aligned}$$

Nu vil vi vise Gram-Schmidt, som bruges til at danne en ortonormal basis ud fra en anden basis. Processen går ud på, at man først gør de enkelte vektorer i basen til enhedsvektorer, og derefter retter man dem op med projektion.

Sætning 5.6.1 (Gram-Schmidt): Lad $\{x_1, \dots, x_n\}$ være en basis til det indre produkt rum V. Lad

$$u_1 = \left(\frac{1}{\|x_1\|} \right) x_1$$

og definer $u_2, \dots, u_n$ rekursivt:

$$u_{k+1} = \frac{1}{\|x_{k+1} - p_k\|} (x_{k+1} - p_k) \quad , \quad k = 1, \dots, n - 1$$

hvor vi har defineret projektionen af x_{k+1} på $Span(u_1, \dots, u_k)$:

$$p_k = \langle x_{k+1}, u_1 \rangle u_1 + \dots + \langle x_{k+1}, u_k \rangle u_k$$

Så er $\{u_1, \dots, u_k\}$ en ortonormal basis for $Span(x_1, \dots, x_k)$. Mængden $\{u_1, \dots, u_n\}$ er en ortonormal basis for *V*.

Bevis: *Basis:* Det ses tydeligt, at det gælder for $Span(u_1) = Span(x_1)$.

IH: Vi siger det gælder for k, så der er konstrueret en mængde $\{u_1, \dots, u_k\}$ som er ortonormal for S_k og vi har:

$$Span(u_1, \dots, u_k) = Span(x_1, \dots, x_k) = S_k \quad , \quad k < n$$

Induktionsskridt: $k + 1$.

p_k er projektionen af x_{k+1} på S_k. Så skriver vi (jf. 5.5.7):

$$p_k = \langle x_{k+1}, u_1 \rangle u_1 + \cdots + \langle x_{k+1}, u_k \rangle u_k = \sum_{i=1}^{k} \langle x_{k+1}, u_i \rangle u_i$$

1) Først skal vi vise, at $\boldsymbol{x_{k+1} - p_k}$ er lin. uafh. og ikke-nul.

Da $p_k \in S_k$ kan vi skrive p_k som en linear kombination af $x_1, \dots, x_k$:

$$p_k = c_1 x_1 + \cdots + c_k x_k$$

Vi kigger så på:

$$x_{k+1} - p_k = x_{k+1} - c_1 x_1 - \cdots - c_k x_k$$

Og vi har her, at $x_{k+1} - p_k \in S_{k+1}$ og da $x_1, \dots, x_{k+1}$ er lineært uafhængig da $\{x_1, \dots, x_n\}$ er en basis, så giver ovenstående ligning ikke-nul: $x_{k+1} - p_k \neq 0$ (da den har en ikke-nul skalar).

2) Så skal vi vise, at $\boldsymbol{x_{k+1} - p_k \perp u_i \quad , i = 1, \dots, k}$ (et krav for ONB):

Lemma 5.5.7 fortæller, at $x_{k+1} - p_k \in S_k^{\perp}$ pga. def. af p_k og dermed er

$$x_{k+1} - p_k \perp u_i \quad , \quad i = 1, \dots, k$$

3) Til sidst skal vi vise, at vi kan danne en ny enhedsvektor ud fra $\boldsymbol{x_{k+1} - p_k}$:

Hvis vi nu siger, at:

$$u_{k+1} = \frac{x_{k+1} - p_k}{\|x_{k+1} - p_k\|}$$

Så er $\{u_1, \dots, u_{k+1}\}$ ortonormal (enhedsvektorer og ortogonale på hinanden) og indeholdt i S_{k+1}. Da $u_1, \dots, u_{k+1}$ er lineært uafhængige, så udgør de en ortonormal basis for S_{k+1}.