12. Ortogonale og unitære matricer

- **Def. Ortogonal matrix**
- **Sætning 5.5.5**
- **Def. Unitær matrix**
- **Schurs sætning**

Først vil vi definere nogle grundbegreber til senere brug:

Definition: En mængde vektorer er **ortonormale**, hvis de er:

- **ortogonale** på hinanden: $\langle v_i, v_j \rangle = 0 \ \ , i \neq j$

- enhedsvektorer.

Vi har så, at en mængde af vektorer er ortonormale, hvis:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \ \ i = j \\ 0 & , \ \ i \neq j \end{cases}$$

Nu vil vi definere ortogonal matricer:

Definition: En $n \times n$ matrix er en **ortogonal matrix**, hvis søjlevektorerne udgør en ortonormal mængde i $\mathbb{R}^n$.

Og en lille sætning:

Sætning 5.5.5: En $n \times n$-matrix Q er ortogonal $\Leftrightarrow Q^T Q = I$

Bevis: Det følger af definitionerne, at Q kun er ortogonal, hvis og kun hvis

$$q_i^T q_j = \langle q_i, q_j \rangle = \delta_{ij}$$

Altså, at ovenstående kun giver 1, hvis $i = j$. Da $q_i^T q_j$ også er den (i, j)'te indgang i $Q^T Q$, må alle diagonalindgangene være 1, og vi har $Q^T Q = I$.

Unitære matricer er stort set det samme, bare i det komplekse rum $\mathbb{C}^n$.

Definition: En $n \times n$ matrix er en **unitær matrix**, hvis søjlevektorerne udgør en ortonormal mængde i $\mathbb{C}^n$. Hvis U er unitær gælder $U^H U = I$.

Når vi taler om komplekse matricer, er der nogle forskellige operationer og definitioner, som er nyttige.

Først og fremmest har vi, at hvis vi kompleks konjugerer og transponerer en matrix noteres det således (med de følgende regneregler, som ligner transponeringsregnereglerne meget):

$$\bar{M}^T = M^H$$

$$(A^H)^H = A$$

$$(\alpha A + \beta B)^H = \bar{\alpha} A^H + \bar{\beta} B^H$$

$$(AC)^H = C^H A^H$$

Til sidst, siger vi, at en matrix er **hermitisk,** hvis $M = M^H$ (ligesom symmetriske matricer i $\mathbb{R}$)

Sætning 6.4.3 (Schurs sætning): For hver $n \times n$-matrix A eksisterer der en unitær matrix U således, at $U^H A U$ er øvre triangulær (noteret T).

Bevis: Vi inducerer på n.

Basis: $n = 1$. Åbenlyst korrekt.

IH: Vi antager at det gælder for en $k \times k$-matrix.

Induktionsskridt: $n = k + 1$. Så vi kigger på en $(k + 1) \times (k + 1)$-matrix A. Vi siger, at λ_1 er egenværdi til A med tilhørende **enheds**egenvektor w_1.

Vi bruger Gram-Schmidt til at finde $w_2, \dots, w_{k+1}$ således at $\{w_1, \dots, w_{k+1}\}$ er en ortonormal basis for $\mathbb{C}^{k+1}$. Så lader vi W være matricen bestående af w_i , $i = 1, \dots, k+1$ som søjlevektorer. Dermed opfylder W definitionen for en unitær matrix.

Første søjle i $W^H AW$ er så:

$$W^H A w_1 = \lambda_1 W^H w_1 = \lambda_1 e_1$$

(da e_1 er første søjle i identitsmatricen)

Så ser vi på, hvordan $W^H AW$ ser ud:

$$W^H AW = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \times\times\times\times\times \\ \hline 0 & \\ 0 & M \\ 0 & \end{array}\right)$$

Hvor M er en $k \times k$-matrix. Vores IH siger, at sætningen gælder for M, så vi har en unitær matrix V_1 således at $V_1^H M V_1 = T_1$ hvor T_1 er øvre triangulær. Så definerer vi:

$$V = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0000000 \\ \hline 0 & \\ 0 & V_1 \\ 0 & \end{array}\right)$$

V er unitær. Så prøver vi at gange hhv. V^H og V på den første matrix:

$$V^H W^H AWV = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0000000 \\ \hline 0 & \\ 0 & V_1^H \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \times\times\times\times\times \\ \hline 0 & \\ 0 & M \\ 0 & \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0000000 \\ \hline 0 & \\ 0 & V_1 \\ 0 & \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \times\times\times\times\times \\ \hline 0 & \\ 0 & V_1^H M V_1 \\ 0 & \end{array}\right)$$

$$= \left(\begin{array}{c|c} \lambda_1 & \times\times\times\times\times \\ \hline 0 & \\ 0 & T_1 \\ 0 & \end{array}\right) = T$$

Da $V^H W^H AWV = (WV)^H AWV$ sætter vi $U = WV$ og ser om U er unitær:

$$U^H U = (WV)^H WV = V^H W^H WV = I$$