13. Unitær diagonalisering

- **Def. Unitær matrix**
- **Schurs sætning**
- **Spektralsætningen**

Definition: En $n \times n$ matrix er en **unitær matrix**, hvis søjlevektorerne udgør en ortonormal mængde i $\mathbb{C}^n$. Hvis U er unitær gælder $U^H U = I$ og $U^{-1} = IU^{-1} = U^H U U^{-1} = U^H$

En mængde af vektorer $\{u_1, \dots, u_n\}$ er ortonormale, hvis:

$$\langle u_i, u_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & , \ i = j \\ 0 & , \ i \neq j \end{cases}$$

Når vi taler om komplekse matricer, er der nogle forskellige operationer og definitioner, som er nyttige.

Først og fremmest har vi, at hvis vi kompleks konjugerer og transponerer en matrix noteres det således (med de følgende regneregler, som ligner transponeringsregnereglerne meget):

$$\bar{M}^T = M^H$$

$$(A^H)^H = A$$

$$(\alpha A + \beta B)^H = \bar{\alpha} A^H + \bar{\beta} B^H$$

$$(AC)^H = C^H A^H$$

Til sidst, siger vi, at en matrix er **hermitisk,** hvis $M = M^H$ (ligesom symmetriske matricer i $\mathbb{R}$)

Sætning 6.4.3 (Schurs sætning): For hver $n \times n$-matrix A eksisterer der en unitær matrix U således, at $U^H A U$ er øvre triangulær (noteret T).

Bevis: Vi inducerer på n.

Basis: $n = 1$. Åbenlyst korrekt.

IH: Vi antager at det gælder for en $k \times k$-matrix.

Induktionsskridt: $n = k + 1$. Så vi kigger på en $(k+1) \times (k+1)$-matrix A. Vi siger, at λ_1 er egenværdi til A med tilhørende **enheds**egenvektor w_1.

Vi bruger Gram-Schmidt til at finde $w_2, \dots, w_{k+1}$ således at $\{w_1, \dots, w_{k+1}\}$ er en ortonormal basis for $\mathbb{C}^{k+1}$. Så lader vi W være matricen bestående af w_i , $i = 1, \dots, k+1$ som søjlevektorer. Dermed opfylder W definitionen for en unitær matrix.

Første søjle i $W^H A W$ er så:

$$W^H A w_1 = \lambda_1 W^H w_1 = \lambda_1 e_1$$

(da e_1 er første søjle i identitsmatricen)

Så ser vi på, hvordan $W^H A W$ ser ud:

$$W^H A W = \begin{pmatrix} \lambda_1 & | & \times\times\times\times\times \\ \hline 0 & | & \\ 0 & | & M \\ 0 & | & \end{pmatrix}$$

Hvor M er en $k \times k$-matrix. Vores IH siger, at sætningen gælder for M, så vi har en unitær matrix V_1 således at $V_1^H M V_1 = T_1$ hvor T_1 er øvre triangulær. Så definerer vi:

$$V = \begin{pmatrix} 1 & | & 0000000 \\ \hline 0 & | & \\ 0 & | & V_1 \\ 0 & | & \end{pmatrix}$$

V er unitær. Så prøver vi at gange hhv. V^H og V på den første matrix:

$$V^H W^H A W V = \begin{pmatrix} 1 \mid 0000000 \\ \hline 0 \mid \\ 0 \mid \;\; V_1^H \\ 0 \mid \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \mid \times\times\times\times\times \\ \hline 0 \mid \\ 0 \mid \;\; M \\ 0 \mid \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \mid 0000000 \\ \hline 0 \mid \\ 0 \mid \;\; V_1 \\ 0 \mid \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \mid \times\times\times\times\times \\ \hline 0 \mid \\ 0 \mid \;\; V_1^H M V_1 \\ 0 \mid \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda_1 \mid \times\times\times\times\times \\ \hline 0 \mid \\ 0 \mid \;\; T_1 \\ 0 \mid \end{pmatrix} = T$$

Da $V^H W^H A W V = (WV)^H A W V$ sætter vi $U = WV$ og ser om U er unitær:

$$U^H U = (WV)^H W V = V^H W^H W V = I$$

Faktoriseringen $A = U T U^H$ kaldes Schur… Hvis A er hermitisk, så vil T være en diagonalmatrix.

Sætning 6.4.4 (spektral sætningen): Hvis A er hermitisk så eksisterer der en unitær matrix U, som diagonaliserer A.

Bevis: Vi ved fra beviset før, at der findes en unitær matrix U således at $U^H A U = T$, hvor T er øvre triangulær. Vi kigger på T:

$$T^H = (U^H A U)^H = U^H A^H (U^H)^H = U^H A U = T$$

Da T er øvre triangulær og hermitisk, *må* den også være diagonal (da man transponerer indgangene).

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & \cdots & t_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow T^H = \begin{pmatrix} \overline{t_{11}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{t_{1n}} & \cdots & \overline{t_{nn}} \end{pmatrix}$$