14. Kvadratiske former

- **Def.**
- **Sætning 6.6.1**
- **Definit**
- **Sætning 6.6.2**

Til hver kvadratisk ligning, kan der associeres en vektorfunktion $f(x) = x^T Ax$, som kaldes den kvadratiske form. Bruges specielt i optimeringsteori.

Definition: En kvadratisk ligning med to variabler x og y kan skrives på formen:

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$$

Dette kan skrives på matrixform:

$$(x \ \ y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (d \ \ e)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + f = 0$$

Hvis vi så siger, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ og $x = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ så kaldes:

$$x^T Ax = ax^2 + 2bxy + cy^2$$

den kvadratiske form tilhørende den kvadratiske ligning.

Korollar 6.4.5: Hvis A er en reel symmetrisk matrix, dvs. $A = A^T$, så eksisterer der en ortogonal matrix Q, som diagonaliserer A, således at $Q^T AQ = D$, hvor D er diagonal.

Givet en kvadratisk ligning kan vi oversætte og rotere den, så vi får den på ”standard form”. For det generelle n-dimensionelle tilfælde kan den kvadratiske form altid oversættes til en mere simpel diagonal form:

Sætning 6.6.1: Hvis A er en reel symmetrisk $n \times n$-matrix, så kan vi skifte variabler til $u = Q^T x$ således at $x^T Ax = u^T Du$ hvor D er en diagonalmatrix.

Bevis: Korollar 6.4.5 siger, at til en reel symmetrisk matrix A, findes der en ortogonalmatrix, som diagonaliserer A: $Q^T AQ = D$.

Hvis $u = Q^T x$, så er $Qu = QQ^T x \Rightarrow x = Qu$ og $x^T = u^T Q^T$

Vi tager den kvadratiske form, og indsætter ovenstående:

$$x^T Ax = u^T Q^T AQu = u^T Du$$

I forbindelse med optimering af funktioner med flere variabler, ved vi, hvis funktionen er en kvadratisk form, så er det kritiske punkt 0. Om dette er maks., min. eller saddelpunkt afhænger af egenværdierne.

Hvis vi kigger på de kvadratiske former, så siger vi, at en $f(x)$ har globalt minimum i **0**, hvis og kun hvis $x^T Ax > 0 \ \ , \ \ \forall x \neq 0$. Vi siger også, at $f(x)$ har globalt maximum i **0**, hvis og kun hvis $x^T Ax < 0 \ \ , \ \ \forall x \neq 0$. Hvis $x^T Ax$ skifter fortegn, er det et saddelpunkt. Generelt har vi følgende definition:

Definition: Vi siger, at en kvadratisk form $f(x) = x^T Ax$ er **definit**, hvis den for forskellige x ikke skifter fortegn. **En reel symmetrisk matrix A**

er **positiv definit**, hvis $x^T Ax > 0 \ \ , \ \ \forall x \neq 0$

er **negativ definit**, hvis $x^T Ax < 0 \ \ , \ \ \forall x \neq 0$

er **ikke-definit,** hvis der er fortegnskift for forskellig x

er **postiv semi-definit**, hvis $x^T Ax \geq 0 \ \ , \ \ \forall x \neq 0$

er **negativ semi-definit**, hvis $x^T Ax \leq 0 \ \ , \ \ \forall x \neq 0$

Hvis A er invertibel så er 0 det eneste stationære punkt. Jf. definition og teksten før, har vi så nu, at hvis en kvadratisk form er positiv definit er det et globalt minimum, hvis den er negativ definit er det et globalt maksimum og hvis den er ikke-definit er det et saddel-punkt. For at finde ud af, hvad et punkt er, må vi altså finde ud af, hvad matricen er. Her er næste sætning nyttig:

Sætning 6.6.2: A er en reel symmetrisk $n \times n$-matrix, så er A positiv definit, hvis og kun hvis alle A's egenværdier er positive.

Bevis: $\Rightarrow$: Hvis A er positiv definit og λ er en egenværdi til A, så for en egenvektor x tilhørende λ:

$$x^T Ax = \lambda x^T x = \lambda \|x\|^2$$

Dermed har vi:

$$\lambda = \frac{x^T Ax}{\|x\|^2} > 0$$

Og alle egenværdier er positive.

$\Leftarrow$: Hvis alle egenværdier for A er positive, så lader vi $\{x_1, \dots, x_n\}$ være en ortonormal mængde af egenvektorer for A. Hvis x er en ikke-nul vektor, så kan vi skrive den som en linear kombination:

$$x = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n$$

Hvor $\alpha_i = x^T \quad , \quad = 1, \dots, n$ $\qquad \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i)^2 = \|x\|^2 > 0$

Hvis vi så kigger på den kvadratiske form:

$$x^T Ax = (\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n)^T (\alpha_1 \lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_n \lambda_n x_n)$$

$$= (\alpha_1)^2 \lambda_1 x_1^T x_1 + \cdots + (\alpha_n)^2 \lambda_n x_n^T x_n = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i)^2 \lambda_i$$

$$\geq (\min \lambda_i) \|x\|^2 > 0$$

Og dermed er A positiv definit.