# 15. Lineære differentialligninger

- **Løsninger**
- **Begyndelsesværdiproblemet**
- **Putzers algoritme**

Vi betragter først et lineært differentialligningssystem:

$$\begin{array}{ccc} y_1' & = & a_{11}y_1 + \cdots + a_{1n}y_n \\ \vdots & = & \vdots \\ y_n' & = & a_{n1}y_1 + \cdots + a_{nn}y_n \end{array}$$

Hvor $y_i(t) = f_i(t)$ er en kontinuert funktion. Dette system kan skrives mere simpelt op på formen:

$$\boldsymbol{Y}' = A\boldsymbol{Y}$$

Hvor $\boldsymbol{Y}'$ og $\boldsymbol{Y}$ er vektorfunktioner af $t$ og $A$ er en $n \times n$-matrix.

**For det simple tilfælde $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{1}$:** $y' = ay$, har vi løsningen $y(t) = ce^{at}$, hvor $c$ er en konstant.

**En generel løsning** for $\boldsymbol{n} > 1$ med egenværdier og egenvektorer for $A$ er:

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} x_1 e^{\lambda t} \\ \vdots \\ x_n e^{\lambda t} \end{pmatrix} = e^{\lambda t}\boldsymbol{x} \quad , \quad hvor\ \boldsymbol{x}\ er\ en\ vektor$$

For at se om dette er en løsning, differentierer vi det:

$$\boldsymbol{Y}' = \lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{Y}$$

Hvis vi siger, at $\lambda$ er en egenværdi til $A$ med tilhørende egenvektor $\boldsymbol{x}$, så har vi:

$$A\boldsymbol{Y} = e^{\lambda t}A\boldsymbol{x} = \lambda e^{\lambda t}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{Y} = \boldsymbol{Y}'$$

Dermed har vi vist, at $\boldsymbol{Y} = e^{\lambda t}\boldsymbol{x}$ er en løsning til differentialligningssystemet.

Hvis vi siger, at $\boldsymbol{Y}(t)$ er en løsning, så skal den have en bestemt værdi $\boldsymbol{Y}_0$ for $t = 0$, så siger en sætning, at ***begyndelsesværdiproblemet*** vil have en unik løsning.

$$\boldsymbol{Y}' = A\boldsymbol{Y} \quad , \quad \boldsymbol{Y}(0) = \boldsymbol{Y}_0$$

En måde at løse disse problemer på er med **matrixeksponentialet**. For $n = 1$ har vi igen, at løsningen er på formen:

$$y = e^{at}y_0 \quad , \quad y(0) = y_0$$

Dette generaliserer vi igen til $n > 1$ og prøver at indsætte $e^{tA}$ i ovenstående løsning:

$$\boldsymbol{Y}(t) = e^{tA}\boldsymbol{Y}_0 \quad , \quad \boldsymbol{Y}(0) = e^{0A}\boldsymbol{Y}_0 = 1\boldsymbol{Y}_0 = \boldsymbol{Y}_0$$

Vi kan tjekke om det er en løsning ved at differentiere den, og se om den giver differentialligningen. Bemærk, at $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$:

$$\boldsymbol{Y}' = Ae^{tA}\boldsymbol{Y}_0 = A\boldsymbol{Y}$$

Generelt er det nemt at finde løsninger til differentialligningssystemer, hvis bare $A$ er diagonaliserbar:

$$\boldsymbol{Y} = e^{tA}\boldsymbol{Y}_0 = Xe^{tD}X^{-1}\boldsymbol{Y}_0$$

Hvor $D$ er diagonalmatrixen, og $X$ er diagonaliseringsmatrixen. Så handler det blot om at finde egenværdier og egenvektorer for $A$. Hvis ikke $A$ er diagonaliserbar, bruger vi Putzers algoritme til at finde matrixeksponetialet $e^{tA}$:

**Sætning (Putzers algoritme):** $A$ er en $n \times n$-matrix i det komplekse rum med $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ egenværdier. Så lader vi

$$P_0 = I \quad , \quad P_k = \prod_{j=1}^{k}\left(A - \lambda_j I\right) \quad , \quad k = 1, \ldots, n$$

Vi definerer så:

$$Q(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k$$

Hvor $r_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ og

$$r_k(t) = e^{\lambda_k t} \int_0^t e^{-\lambda_k s} r_{k-1}(s) ds \quad , \quad k = 2, \dots, n$$

Så gælder der, at $Q(0) = I$ og $Q'(t) = AQ(t) = Q(t)A$.

**Bevis:** Først ser vi på $r$ og $Q$, hvis $t = 0$ indsættes:

$$r_1(0) = e^{\lambda_1 0} = 1 \quad , \quad r_k(0) = e^{\lambda_k 0} \int_0^0 e^{-\lambda_k s} r_{k-1}(s) ds = 0$$

$$Q(0) = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(0) P_k = r_1(0) P_0 + \sum_{k=1}^{n-1} r_{k+1}(0) P_k = 1P_0 + 0 = P_0 = I$$

Det er klart, at $A$ kommuterer med $(A - \lambda_i I)$: $A(A - \lambda_i I) = (A - \lambda_i I)A$. Dermed kommuterer $A$ også med $P_0, \dots, P_{n-1}$ og så med $Q(t)$ dvs.: $AQ(t) = Q(t)A$.

Så kigger vi på $k > 1$. Vi starter med at differentiere $r$:

$$r_k'(t) = \lambda_k e^{\lambda_k t} \int_0^t e^{-\lambda_k s} r_{k-1}(s) ds + e^{\lambda_k t} e^{-\lambda_k t} r_{k-1}(t) = \lambda_k r_k(t) + r_{k-1}(t)$$

Vi definerer $r_0(t) = 0$, så gælder dette også for $k = 1$.

Herefter differentierer vi $Q$:

$$Q'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}'(t) P_k = \sum_{k=0}^{n-1} \big(\lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t)\big) P_k$$

Til sidst skal vi se, om $Q'(t) = AQ(t)$, så vi trækker højresiden fra venstresiden og ser om det giver 0:

$$\begin{aligned}
Q'(t) - AQ(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \big(\lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t)\big) P_k - A \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (\lambda_{k+1} r_{k+1}(t) P_k + r_k(t) P_k - A r_{k+1}(t) P_k)
\end{aligned}$$

her skal vi have det karakteristiske pol frem $(A - \lambda_{k+1} I)$
så vi rykker rundt på leddene og sætter uden for ( )

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-r_{k+1}(t)(A - \lambda_{k+1} I) P_k + r_k(t) P_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (-r_{k+1}(t) P_{k+1} + r_k(t) P_k) \quad (*) \\
&= -r_n(t) P_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

$(*)$ Her æder leddene hinanden således, at vi ender med:

$$\begin{aligned}
&= (-r_1(t)P_1 + r_0(t)P_0) + (-r_2(t)P_2 + r_1(t)P_1) + \dots + (-r_{n-1}(t)P_{n-1} + r_{n-2}(t)P_{n-2}) \\
&\qquad + (-r_n(t)P_n + r_{n-1}(t)P_{n-1}) \\
&= -r_n(t)P_n
\end{aligned}$$

Ved sidste lighedstegn bruger vi Cayley-Hamilton-sætningen, da

$$P_n = p_A(A) = 0$$

$Q(t)$ er den differentiable matrixfunktion, der opfylder $\exp(0A) = I$ og $\exp(tA)' = A \exp(tA)$. Dermed kan vi bruge $Q(t)$ til at løse differentialligninger med.