16. Markovprocesser

- **Definition**
- **Sætning 6.3.3**
- **Dominerende egeværdi**
- **Sætning 6.3.4**

Definition: En stokastisk proces en sekvens af eksperimenter, hvor udfaldet afhænger af sandsynlighed. En **Markovproces** er en stokastisk proces, der opfylder følgende:

I. Mængden af mulige udfald er endelig.

II. Sandsynligheden for næste udfald afhænger udelukkende af det foregående.

III. Sandsynlighederne er konstante over tid.

En **Markovkæde** består af en række tilstandsvektorer $x_0, \dots, x_n$ som også er sandsynlighedsvektorer, hvor x_0 kaldes startvektoren. A er en $n \times n$-matrix, som vi kalder transitionsmatrixen (stokastisk matrix) for Markovprocessen. Vi har så

$$x_0\,,\ x_1 = Ax_0\,, x_2 = Ax_1\ , \dots$$

Dvs. mere generelt: $x_n = Ax_{n-1}$

En matrix er stokastisk, hvis indgangene er ikke-negative og summen af søjlerne er 1. Så er søjlerne også sandsynlighedsvektorer.

Sætning 6.3.3: Hvis A er en stokastisk matrix, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ er en sandsynlighedsvektor. Vi definerer $x_k = A^k x_0\,, k = 1, \dots$, og vi antager $x_k \xrightarrow{k\to\infty} x$ (Markovkæden konvergerer mod *x*). Så gælder der om den stabile tilstandsvektor *x*:

(i) x er en sandsynlighedsvektor (ikke-negative indgange, som summer op til 1).

(ii) $\lambda_1 = 1$ er en egenværdi til A og x er en egenværdi tilhørende λ_1.

Bevis for (i): Da x_k er en sandsynlighedsvektor gælder det følgende:

Hvis $(x)_i$ er i'te indgang i x og $(x_k)_i$ er i'te indgang i x_k, så har vi: $(x)_i = \lim_k (x_k)_i$. Da $(x_k)_i \geq 0$ er $(x)_i \geq 0$, og x har altså ikke-negative indgange. Vi kontrollere om indgangene for x summer op til 1:

$$e^T x = e^T\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = \lim_{k\to\infty} e^T x_k = \lim_{k\to\infty} e^T\left(A^k x_0\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left(e^T A^k\right)x_0 \overset{da\ A^k\ består\ af\ ss-vektorer}{=} \lim_{k\to\infty} e^T x_0 = \lim_{k\to\infty} 1 = 1$$

Hvor $e^T = (1, \dots, 1)$.

Bevis for (ii): $Ax = A(\lim_{k\to\infty} x_k) = \lim_{k\to\infty} Ax_k \overset{def}{=} \lim_{k\to\infty} x_{k+1} \overset{sætn}{=} x$

Der eksisterer altid en stabil tilstandsvektor, hvis $\lambda_1 = 1$ er en **dominerende egenværdi** til *A*. Den er dominerende, hvis $|\lambda_j| < |\lambda_1|\ \ , i = 2, \dots, n$. Vi husker på at alle indgange i A er positive.

Sætning 6.3.4: Hvis $\lambda_1 = 1$ er en dominerende egenværdi til *A*, så vil Markovkæden med transitionen A konvergere mod en stabil tilstandsvektor.

Bevis: Når A er diagonaliserbar, så er y_1 en egenvektor tilhørende $\lambda_1 = 1$ og lad $Y = (y_1, \dots, y_n)$ være den matrix, der diagonaliserer *A*. Vi definerer $E = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in Mat_{n,n}$

$$D^k = \begin{pmatrix} \lambda_1^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^k \end{pmatrix} \xrightarrow{k\to\infty} E$$

Hvis så x_0 er startsandsynlighedsvektoren og $c = Y^{-1}x_0$, så er:

$$x_k = A^k x_0 = YD^kY^{-1}x_0 = YD^kc \xrightarrow{k\to\infty} YEc = Y(c_1 e_1) = c_1\boldsymbol{y_1}$$

Så $c_1 y_1$ er den stabile tilstandsvektor til Markovkæden. Dette passer jo også fint med, at y_1 er en egenvektor tilhørende λ_1 (c_1 er jo bare en skalar).